5.   Марковский процесс с дискретным временем, граф состояний. Стационарный режим. Условия. Предельные вероятности. Поток вероятности. Нахождение предельных вероятностей. Матричный способ.

Марковский процесс с дискретным временем

• Некоторая система S может принимать только одно из

дискретных состояний S1, S2, … , S𝑛 , которых может быть

неограниченно много.

• Переходы системы S между своими дискретными состояниями

S1, S2, … , S𝑖, … происходят только в определенные дискретные

моменты времени t1,t2,t3, …

• Система может изменять свое состояние только по шагам.

• Время между шагами не обязательно одинаковое, но в расчетах

используются только номера шагов.

• ) – вероятность того, что система находится в

состоянии на 𝑘-том шаге.

• Марковские процессы с дискретным временем также называют

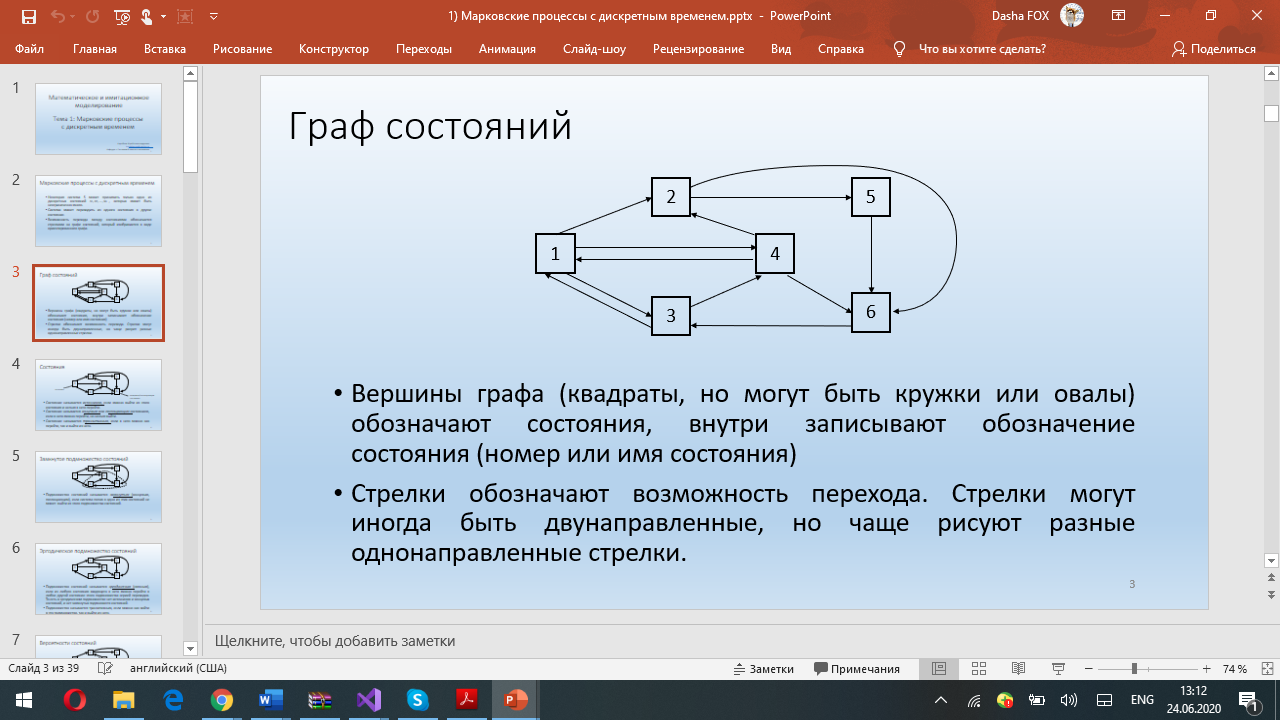
марковскими цепями.

Случайный процесс, протекающий в системе s c дискретными состояниями s1, s2,..si называется марковским, если для любого момента времени t0, вероятность каждого из состояний системы в будущем при t>t0 зависит только от того, в каком времени t0 и не зависит от того, каким образом система оказалась в этом состоянии (текущем).

Граф состояний фиксирует переход из состояния 1 в другое состояние. Возможность перехода из состояния в состояние показано стрелочками (существуют двунаправленные и однонаправленные.)

Вершины графа (квадраты, но могут быть кружки или овалы) обозначают состояния, внутри записывают обозначение состояния (номер или имя состояния)

Пример:



Стационарный режим.

* Для некоторых систем возможен стационарный режим, когда с увеличением количества шагов вероятности состояний перестают меняться (состояния меняются, но их вероятности уже не меняются).

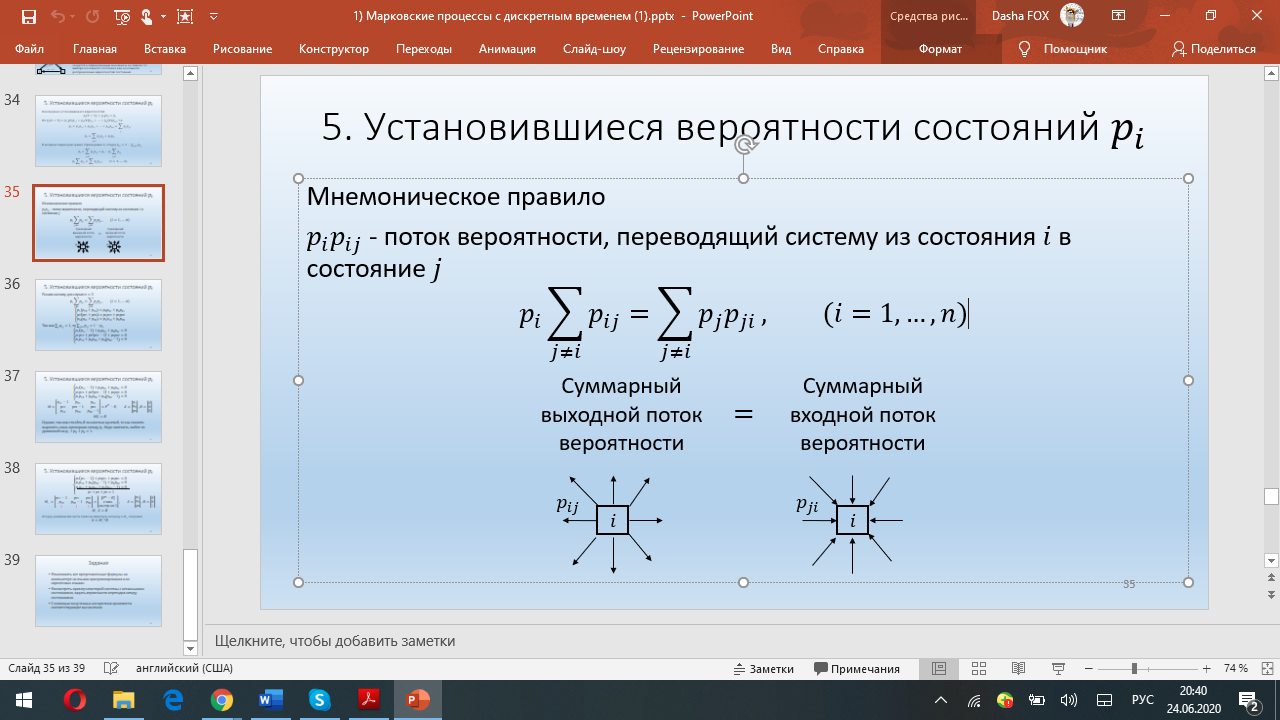
Условия.

1. Множество всех состояний системы должно быть эргодическим.
2. Марковский процесс должен быть однородным (pij(k) = pij).
3. Марковский процесс должен быть хорошо перемешиваемым (не должно быть строгой цикличности состояний, когда состояния чередуются в зависимости от номера шага).

При выполнении 3 условий вероятность состояний сходится к определенным значения и не зависит от выбора начального состояния или начального распределения вероятностей состояний.

Поток вероятности.

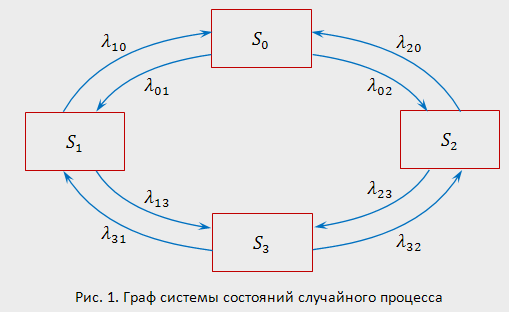
- поток вероятности, переводящий систему из состояния в состояние



Нахождение предельных вероятностей.

Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями \lambda_{ij}\,(i,j=0,1,2,3); так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния S_1 в S_0 — под воздействием потока "окончаний ремонтов" первого узла и т.п.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями будем называть ***размеченным*** (см. рис. 1). Рассматриваемая система S имеет четыре возможных состояния: S_0,\,S_1,\,S_2,\,S_3.



***Вероятностью i-го состояния*** называется вероятность p_i(t) того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

\sum_{i=0}^{3}p_i(t)=p_0(y)+p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1.

|  |
| --- |
| (8) |

Рассмотрим систему

момент t и, задав малый промежуток \Delta t, найдем вероятность p_0(t+\Delta t) того, что система в момент t+\Delta t будет находиться в состоянии S_0. Это достигается разными способами.

**1.** Система в момент t с вероятностью p_0(t) находилась в состоянии S_0, а за время \Delta t не вышла из него.

Вывести систему из этого состояния (см. граф на рис. 1) можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью (\lambda_{01}+\lambda_{02}), т.е. в соответствии с формулой (7), с вероятностью, приближенно равной (\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t. А вероятность того, что система не выйдет из состояния S_0, равна [1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t]. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по первому способу (т.е. того, что находилась в состоянии S_0 и не выйдет из него за время \Delta t), равна по теореме умножения вероятностей:

p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t].

**2.** Система в момент t с вероятностями p_1(t) (или p_2(t)) находилась в состоянии S_1 или S_2 и за время \Delta t  перешла в состояние S_0.

Потоком интенсивностью \lambda_{10} система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной \lambda_{10}\Delta t (или \lambda_{20}\Delta t). Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по этому способу, равна \p_1(t)\lambda_{10}\Delta t (или \p_2(t)\lambda_{20}\Delta t).

Применяя теорему сложения вероятностей, получим

p_0(t+\Delta t)= p_1(t)\lambda_{10}\Delta t+ p_2(t)\lambda_{20}\Delta t+p_0(t)[1- (\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t],

откуда

\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}= p_1(t)\lambda_{10}+ p_2(t)\lambda_{20}-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0(t).

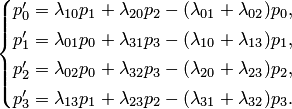
Переходя к пределу при \Delta t\to0 (приближенные равенства, связанные с применением формулы (7), перейдут в точные),

получим в левой части уравнения производную p'_0(t) (обозначим ее для простоты p'_0):

p'_0=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0.

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, т.е. уравнение, содержащее как саму неизвестную функцию, так и ее производную первого порядка.

Рассуждая аналогично для других состояний системы S, можно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:



|  |
| --- |
| (9) |

Сформулируем **правило составления уравнений Колмогорова**. *В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).*

В системе (9) независимых уравнений на единицу меньше общего числа уравнений. Поэтому для решения системы необходимо добавить уравнение (8).

Особенность решения дифференциальных уравнений вообще состоит в том, что требуется задать так называемые начальные

условия, т.е. в данном случае вероятности состояний системы в начальный момент t=0. Так, например, систему уравнений (9) естественно решать при условии, что в начальный момент оба узла исправны и система

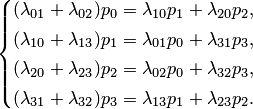
находилась в состоянии S_0 , т.е. при начальных условиях p_0(0)=1, p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0.

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как ***функции времени***. Особый интерес представляют вероятности системы p_i(t) в ***предельном стационарном режиме***, т.е. при t\to\infty, которые называются ***предельными (или финальными) вероятностями*** состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что *если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.*

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает ***среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии***. Например, если предельная вероятность состояния S_0, т.е. p_0=0,\!5, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для системы S с графом состояний, изображенном на рис. 1), такая система уравнений имеет вид:



|  |
| --- |
| (10) |

Систему (10) можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться правилом, согласно которому *слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.*

Матричный способ:

* Решим систему линейных уравнений для случая состояний.
* , где – диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивностей переходов
* Решение даст только пропорции между , надо заменить любую строку на строку из единиц.

Откуда, умножая обе части слева на обратную матрицу к *,* получаем